

110 學年度第一學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：第二章微分

一、多重選擇題（每題 7 分，共 21 分）

第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以 0 分計算。

- 設三次函數 $f(x) = (x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0$ ，其中 a, a_0, a_1, a_2 為實數，請選出正確的選項。
 - (1) $a_1 = f'(a)$ 。
 - (2) $a_2 = f''(a)$ 。
 - (3) 若 $f''(a) = 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形是對稱中心為 (a, a_0) 的點對稱圖形。
 - (4) 若 $f(a) = f'(a) = 0$ ，則 $f(x)$ 有 $(x-a)^2$ 的因式。
 - (5) 若 $f'(a) = f''(a) = 0$ ，則 $f(x)$ 為嚴格遞增函數。
- 已知多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ ，請選出正確的選項。
 - (1) $f(1)$ 是函數 $f(x)$ 的最大值。
 - (2) $f(3)$ 是函數 $f(x)$ 的最小值。
 - (3) 若 $f(0)f(1) < 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 恰有 4 個相異的實根。
 - (4) 若 $f(0)f(3) < 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 恰有 2 個相異的實根。
 - (5) 若 $f(1)f(3) > 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 沒有實根。
- 已知 $f(x)$ 為至少二次的多項式函數， α 為實數，請選出正確的選項。
 - (1) 若 $f'(\alpha) = 0$ 且 $f''(\alpha) < 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處有極大值 $f(\alpha)$ 。
 - (2) 若 $f'(\alpha) = 0$ 且 $f''(\alpha) = 0$ ，則 $(\alpha, f(\alpha))$ 為函數 $f(x)$ 圖形的一個反曲點。
 - (3) 若區間 (a, b) 中的任意實數 x ， $f'(x) \leq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的最大值為 $f(a)$ 、最小值為 $f(b)$ 。
 - (4) 若區間 (a, b) 中的任意實數 x ， $f''(x) \geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的圖形是凹口向上。
 - (5) 若區間 (a, b) 中的任意實數 x ， $f''(x) < 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上有極大值。

二、填充題（每格 6 分，共 66 分）

1. 若函數 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(3x^3 + 2x^2 + x + 1)$ ，則 $f'(-1)$ 的值為____(1)____。
2. 函數 $f(x) = (2x + 1)^3$ 的圖形上，以點 $(-1, -1)$ 為切點的切線方程式為____(2)____。
3. 若函數 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{(x^2 + x + 1)^2}$ ，則 $f'(1)$ 的值為____(3)____。
4. 設 P 點為函數 $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ 圖形外一點，過 P 點且與函數 $f(x)$ 的圖形相切的切線有兩條，其斜率分別是 $-3, 5$ ，則 P 點坐標為____(4)____。
5. 設三次多項式函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處有極小值 3 ，在 $x = 2$ 處有極大值 4 ，則函數 $f(x) =$ ____(5)____。
6. 設 k 為實數，已知三次函數 $f(x) = x^3 + 2kx^2 + 4kx + 8$ 為嚴格遞增函數，則實數 k 的範圍為____(6)____。
7. 設 a 為實數，函數 $f(x) = x^3 - 12x + 8a$ ， $g(x) = x^3 - 6x^2 + 2a^2$ ，若 $g(x)$ 的極大值為 $f(x)$ 的極小值的 2 倍，則實數 a 的值為____(7)____。
8. 設 a 為實數，若函數 $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 3ax^2$ 圖形沒有反曲點，則實數 a 的範圍為____(8)____。
9. 設 a, b 為實數且 $a \neq 0$ ，已知函數 $f(x) = ax^3 + (a^2 - 4)x^2 + bx + 5$ 圖形的所有切線中，斜率最大的是以點 $(-1, 6)$ 為切點的切線 L ，則切線 L 的方程式為____(9)____。
10. 設 a 為實數，若三次函數 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x - 8$ 圖形由原點可作三條相異的切線，則實數 a 的範圍為____(10)____。

11. 設三次函數 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$ ， $P(t, f(t))$ 為函數 $f(x)$ 圖形上一點，其中 t 為正實數，直線 L_1 為函數 $f(x)$ 圖形上以 P 為切點的切線，直線 L_1 與 $y = f(x)$ 圖形交於異於 P 的一點 Q ，且直線 L_2 為函數 $f(x)$ 圖形上以 Q 為切點的切線，已知直線 L_1 與 L_2 互相垂直，則正實數 t 的值為 (11)。

三、計算題（共 13 分）

1. 如圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 15$ ， Q 點是 $\overline{AB}$ 上異於 A, B 的一點， R 點是 $\overline{AD}$ 上異於 A, D 的一點，且 A 點對於直線 QR 的對稱點 P 在 $\overline{BC}$ 上，設 $\overline{BP} = x$ 。
- (1) 試以 x 表示 $\overline{AQ}$ 與 $\overline{AR}$ 。(4 分)
- (2) 求 x 的範圍。(2 分)
- (3) 求 $\triangle PQR$ 面積的最小值。(7 分)

