

# 臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第二學期高三數甲期中考試題卷

※班級、座號欄位劃記錯誤者，扣 5 分。

## 一、單選題（10 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 試問下列函數的圖形何者與函數  $f(x) = x$  的圖形相同？

(1)  $f_1(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$       (2)  $f_2(x) = \sqrt{x^2}$       (3)  $f_3(x) = (x^{0.5})^2$       (4)  $f_4(x) = \log_{0.5} 2^{-x}$       (5)  $f_5(x) = \frac{x + |x|}{2}$

2. 設函數  $f(x) = \log(2 - x)$ ， $g(x) = \sqrt{6 - x}$ ，試問合成函數  $f(g(x))$  的定義域為下列何者？

(1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$     (2)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$     (3)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$     (4)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$     (5)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6\}$

## 二、多選題（20 分）

說明：第 3 至 5 題為多選題，每題至少有一個正確選項，每個選項 2 分，答錯不倒扣。

3. 試問下列敘述哪些正確？

(1) 數列  $\langle (\pi - 4)^n \rangle$  為收斂數列

(2) 若數列  $\langle a_n \rangle$  收斂，且數列  $\langle b_n \rangle$  發散，則數列  $\langle a_n \cdot |b_n| \rangle$  可能收斂

(3) 若數列  $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$  均收斂，且  $a_n \leq c_n \leq b_n$ ，其中  $n$  為自然數，則數列  $\langle c_n \rangle$  為收斂數列

(4)  $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot (-\sqrt{2})^{k-1} = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$

(5)  $0.\overline{09} + 0.\overline{909} = 1$

4. 試問下列敘述哪些正確？

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x - 1} = -\frac{1}{2}$     (2)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[2x] - 2\pi}{x - \pi} = 0$     (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 1| - 1}{x} = -1$     (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^3]}{x^2} = 0$     (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x$  不存在

## 三、選填題（55 分）

說明：第 A 至 I 題為選填題，第 A 至 G 題每題 5 分，第 H 至 I 題每題 10 分，答錯不倒扣。

A. 設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1$ ，且  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ ，對所有正整數  $n$  皆成立，則  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underline{\textcircled{5}}$ 。

B. 設  $a, b$  皆為實數，若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n + 6}{an^3 - bn^2 + 2n - 3} = 4$ ，則  $a + b$  之值為  $\underline{\textcircled{6}\textcircled{7}}$ 。

C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 - 2n - 1}) = \underline{\frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9}}}$ 。

D. 設首項為  $a$ 、公比為  $r$  的無窮等比級數和等於 4；若首項為  $a$ 、公比為  $r^2$  的無窮等比級數和等於  $\frac{16}{5}$ ，則首項為  $2a$ 、公比為  $3r$  的無窮等比級數和等於 ⑩⑪。

E. 設  $f(x) = x^2(1-x)^3$ ，試問  $y = f(x)$  的函數圖形在  $x = 2$  時的切線斜率為 ⑫⑬⑭。

F. 若  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+3}$ ，則  $f'(0) = \frac{\textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。

G. 若  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{(x+1)^3(x+2)^2(x+3)}$ ，則  $f'(1) = \frac{\textcircled{17}\textcircled{18}}{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。

H. 設  $f(x)$  為三次多項式，若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ ，則

$f(1) = \textcircled{21}$  (2分)， $f'(1) = \textcircled{22}$  (3分)， $f(0) = \textcircled{23}\textcircled{24}$  (5分)。

I. 設  $f(x) = x^3(x-1)^4 = a_7(x-2)^7 + a_6(x-2)^6 + \cdots + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ ，則

$f''(2) = \textcircled{25}\textcircled{26}\textcircled{27}$  (5分)， $a_2 = \textcircled{28}\textcircled{29}\textcircled{30}$  (5分)。

#### 四、混和題 (15 分)

說明：單選題請直接寫上答案選項，非選擇題未寫出過程僅有答案者斟酌扣分。

1. 設多項式  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ ，已知方程式  $f(x) = 0$  的實根僅有一正數  $\alpha$ 。

1-1 若  $\alpha$  介於兩整數  $n-1$  和  $n$  之間，試求出  $n$  之值。(單選題，3 分)

(1) -1      (2) 0      (3) 1      (4) 2      (5) 3

1-2 承 1-1，令  $x_0$  為  $n$ ，試求出  $y = f(x)$  的函數圖形在  $x = x_0$  的切線方程式。(4 分)

1-3 承 1-2，利用  $x_0$  和牛頓法找出  $\alpha$  的近似值  $x_1$ 。(1 分)

2. 設兩多項式  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ 、 $g(x) = x^2 - 4x - 2$ ，若坐標平面上  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的函數圖形皆和直線  $L$  切於同一切點  $(a, b)$ 。

2-1 試求出切點  $(a, b)$ 。(4 分)

2-2 試求出直線  $L$  的方程式。(3 分)

臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第二學期高三數甲期中考解答

一、單選題（10 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

|     |     |
|-----|-----|
| 1.  | 2.  |
| (4) | (5) |

二、多選題（20 分）

說明：第 3 至 5 題為多選題，每題至少有一個正確選項，每個選項 2 分，答錯不倒扣。

|           |        |
|-----------|--------|
| 3.        | 4.     |
| (1)(2)(5) | (1)(3) |

三、選填題（55 分）

說明：第 A 至 I 題為選填題，第 A 至 G 題每題 5 分，第 H 至 I 題每題 10 分，答錯不倒扣。

|                                  |    |               |    |                          |               |                 |
|----------------------------------|----|---------------|----|--------------------------|---------------|-----------------|
| A.                               | B. | C.            | D. | E.                       | F.            | G.              |
| 3                                | -1 | $\frac{5}{2}$ | 24 | -16                      | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{1}{36}$ |
| H.                               |    |               |    | I.                       |               |                 |
| $f(1)=0$ ， $f'(1)=1$ ， $f(0)=-8$ |    |               |    | $f''(2)=204$ ， $a_2=102$ |               |                 |

四、混和題（15 分）

說明：單選題請直接寫上答案選項，非選擇題未寫出過程僅有答案者斟酌扣分。

|              |                                                                                  |              |                                                                                                                            |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 題號           | 1.                                                                               | 題號           | 2,                                                                                                                         |
| 1-1<br>(3 分) | (3)                                                                              | 2-1<br>(4 分) | $f'(x)=3x^2-4x-1$ (1 分)， $g'(x)=2x-4$ (1 分)<br>$f'(x)=g'(x)\Rightarrow 3x^2-6x+3=0$<br>$x=1\Rightarrow (a,b)=(1,-5)$ (2 分) |
| 1-2<br>(4 分) | $f'(x)=-3x^2+4x-2$<br>$\Rightarrow f'(2)=-6$ (2 分)<br>切線方程式為 $y+2=-6(x-2)$ (2 分) |              |                                                                                                                            |
| 1-3<br>(1 分) | $x_1=\frac{5}{3}$ (1 分)                                                          | 2-2<br>(3 分) | $f'(1)=g'(1)=-2$ (2 分)<br>$\Rightarrow y+5=-2(x-1)$ (1 分)                                                                  |