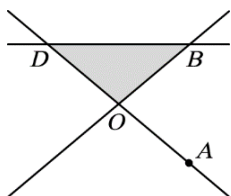


110 學年度第一學期第三次定期考高二數 B 試題

命題範圍：第三章平面向量與應用

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

1. 如圖所示， $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$ ，下列選項中哪些向量的終點會落在 $\triangle BOD$ 的內部？



- (1) $-\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ (2) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ (3) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ (4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ 。
2. 若向量 $\overrightarrow{a} = (4, 7)$ 可以被分解成 $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 兩個分量之和，其中 $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{b}$ 和向量 $(2, 1)$ 平行，則 $\overrightarrow{b} = ?$
- (1) $(-4, -2)$ (2) $(6, 3)$ (3) $(4, 2)$ (4) $(8, 4)$ (5) $(-2, -1)$

二、多選題（每題 8 分，共 16 分）

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 平面上三個非零向量，則下列何者正確？
- (1) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$
- (2) 若 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ ，則 $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$
- (3) 若 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$ ，則必 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$
- (4) 若 $|\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}|$ ，則 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$
- (5) 若 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 是平行的非零向量，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影相同。

2. 已知平面上的兩向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-3, 4)$ ，則下列敘述哪些正確？

(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為鈍角

(2) 平面上的任意向量皆可表示成 $r\vec{a} + s\vec{b}$ ，其中 $r, s \in \mathbb{R}$

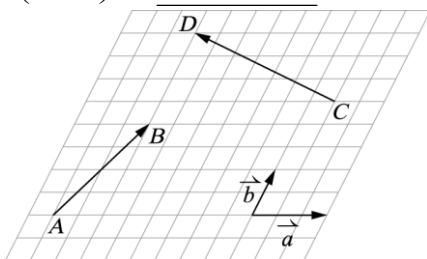
(3) $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影為 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(4) $|t\vec{a} + \vec{b}|$ 的最小值為 20

(5) 平面上不存在非零向量同時與 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 垂直

三、填充題（每題 7 分，共 35 分）

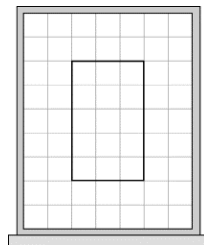
1. 如圖為兩組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離，若 $\vec{AB} - \vec{CD} = r\vec{a} + s\vec{b}$ ，求數對 $(r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 設 A, B, C 為不共線三點， $x, y \in \mathbb{R}$ ，則滿足 $(x+y+1)\vec{AB} + (y-1)\vec{BC} - x\vec{CA} = \vec{0}$ 的數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

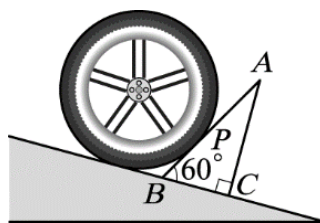
3. 已知向量 $\vec{OA} = (2, -2)$ ， $\vec{OB} = (1, 2)$ 且 $\vec{OC} \perp \vec{OA}$ ， $\vec{AC} \parallel \vec{OB}$ ，求 $\vec{OC}$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 透視法繪圖就像是透過無窮精細的紗帳看東西，這個面罩介於眼睛和物體之間，如此，物體的每一點都向我們的眼睛投射一束穿過紗帳或窗口的光線。如果我們在窗戶與畫之間畫上一個個交叉點，我們就能用極準確的透視法分析繪畫。以單點的透視方法，去觀察及計算景物在畫面出現的正確比例。



小畢透過書桌前窗戶觀察對面的大樓，發現正對面有一建築物描在窗戶上的圖形如圖。他曾聽爸爸說建築物是 9 公尺寬，試求此建築物的高度為多少公尺？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 在一有斜度的上坡停車，為防止車子下滑，在輪胎底下放置一側面為直角三角形的楔型木塊，如圖所示，木塊與輪胎的切點是 P ，若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，且 $\overline{PB}$ 為 20 公分，則輪胎的半徑為 _____ 公分。

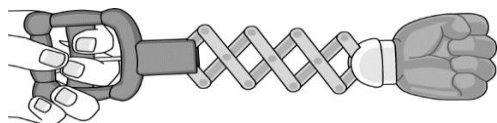


四、填充題（每題 8 分，1 題共 8 分）

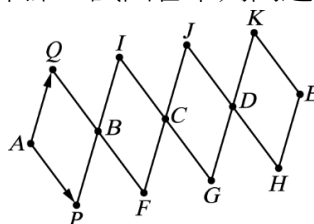
1. 根據 ISO 的規定，將 A0 紙張的長邊對半裁切後可以得到 2 張 A1 紙張，將 A1 紙張的長邊對半裁切後，可以得到 2 張 A2 紙張，以此類推。試回答下列問題：
- (1) 已知 A0 紙張的面積為 1 平方公尺，則 A5 紙張的面積為多少平方公分？答：_____。
- (2) 阿國打算將 A4 紙張裁切為 A7 大小的便條紙，如果他打算製作 120 張便條紙，則他需要準備幾張 A4 紙張？答：_____。

五、混和題（每題 12 分，1 題共 12 分）

1. 圖(一)為伸縮拳，中間結構圖如圖(二)，其中 $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{HE} = \overline{KE} = 25$ ， $\overline{PI} = \overline{QF} = \overline{FJ} = \overline{IG} = \overline{GK} = \overline{JH} = 50$ 。交叉的兩條線段，其交點為此兩條線段的中點，例如 B 點為 $\overline{PI}$ 中點，亦為 $\overline{QF}$ 中點。試回答下列問題：



圖(一)

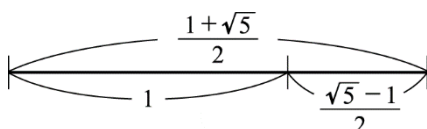


圖(二)

- (1) 若 $\overrightarrow{AE} = k \overrightarrow{AB}$ ，則 k 值為下列哪一個選項？答：_____（單選題）
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6。
- (2) 若 $\overrightarrow{AP} = (15, -20)$ ， $\overrightarrow{AQ} = (7, 24)$ ，則 $\overrightarrow{AE} =$ _____。
- (3) 若 $\angle PAQ = 120^\circ$ ，則 $\overline{AE} =$ _____。
- (4) 承(3)，當 $\angle PAQ$ 從 120° 縮小一半，變成 60° 時， $\overline{AE}$ 的長度會變成原來長度的幾倍？答：_____。

六、計算題（每題 15 分，共 15 分）

1. 黃金比例的概念已經流傳幾千年了。它形塑了許多經典藝術與建築作品的基礎，從埃及的吉薩大金字塔到藝術家喬治·秀拉（Georges Seurat）的畫作《馬戲團遊行》（Parade de cirque）都是。而黃金比例對企業來說可能是非常有價值的。在設計行銷素材、圖標以及網站時充分利用它將能夠為品牌增添更有吸引力的視覺圖像。而此比例是將一線段分成兩線段，如圖（一），左段為長段，右段為短段，使得較長一段比上較短的一段之比值與全段比上較長的一段之比值相等，而此比值稱為黃金比例，即 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

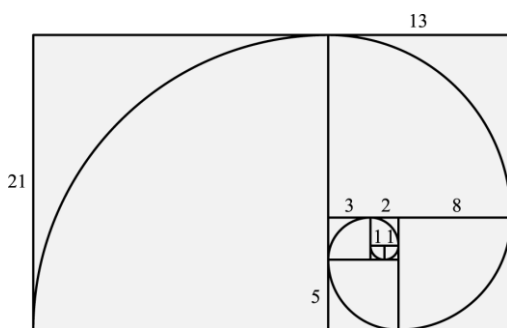


圖(一)

黃金螺旋與黃金比例有密切關係。它是藉著通過黃金矩形的每個部分繪製而成的連續弧形，構成流線形的螺旋。雖然希臘學者想出了為什麼黃金螺旋會存在的數學解釋，但是它在那之前已存在許久。你可以在大自然裡找到滿滿的證據，像是貝殼、花瓣、松果、種子穗和螺旋星系的形狀。部分動物的身體也有此特色，包括海豚、海星和蜜蜂。而此螺線是依照有名的

費氏數列 $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$ 而畫出來的。即 $\langle a_n \rangle = \langle 1, 1, 2, 3,$

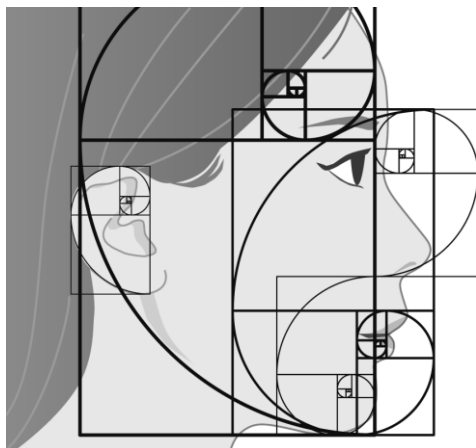
$5, 8, 13, \dots \rangle$ ，如圖(二)所示，第一個正方形邊長為 1、第二個正方形邊長為 1、第三個正方形邊長為 2、第四個正方形邊長為 3、第五個正方形邊長為 5……，按費氏數列之規律往下作正方形，再將其連接並可完成「黃金螺旋」。



圖(二)

有鑑於數學與自然間的聯繫，人體有黃金比例的證據也就不足為奇了。從手臂的比例（手指與前臂和上臂的相比長度）到蒙娜麗莎的臉型都符合盧卡·帕西奧利（Luca Pacioli）在 1509 年提出的神聖比例（Divine Proportion），也與達文西的黃金分割（Golden Section）有異曲同工之妙。

達文西在《維特魯威人》裡使用了黃金比例。許多學者和統計學家皆致力於衡量黃金比例對美麗臉龐的影響程度。根據這些理論，計算出人臉的寬度和長度後，如果長度除以寬度得到的數字接近黃金比例，那麼臉型就會是漂亮的。眼、鼻、口的位置以及其之間的距離也會是吸引力的影響因素。



圖(三)

- (1) 當身高 (h) 與肚臍到腳底的距離 (ℓ) 之比值為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，這樣為最勻稱、協調之美感，這也是高跟鞋的由來。假設小玲身高為 150 公分，且小玲的頭到肚臍：肚臍到腳底的比為 4：6，若小玲想達到完美的黃金比例，求腳下須穿幾公分的高跟鞋呢？（整數以下捨去， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ）
- (2) 圖(二)中的正方形邊長皆由費氏數列 $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$ 得來的，則
 - ①將第 1 塊至第 8 塊正方形邊長列出來。
 - ②將第 1 塊至第 8 塊正方形拼成的矩形面積為何？
- (3) 若將此遞迴數列改成 $a_{n+1} + a_n = \frac{6}{5^{n+1}}$ ， $a_1 = \frac{1}{5}$ ，則 $a_n = ?$