

110 學年度第一學期第三次定期考高一數學試題

命題範圍：多項式函數

一、單選題（每題 5 分，共 25 分）

1. 多項式 $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + ax + b$ 可被 $x^2 + 2x + 2$ 整除，其中 a, b 皆為實數。則 $a + b$ 之值為 (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 1 (E) 2
2. 多項式 $x^{2022} + x^3 + 1$ 除以 $x + 1$ 的餘式為 (A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) -3 (E) x
3. 若 a 為實數，且 $x - 1$ 是多項式 $x^{100} + ax^2 + 1$ 的因式。則 a 之值為 (A) 3 (B) 2 (C) 0 (D) 1 (E) -2
4. 若 $f(x) = 1250x^5 - 2750x^4 - 3012x^3 + 76x^2 - 110x - 35$ ，則 $f(3)$ 之值為 (A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) -5 (E) 3
5. 設 $(x^2 + x + 2)^4 = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ($a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ 皆為實數)，則 $a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0$ 之值為 (A) 272 (B) 256 (C) 136 (D) 68 (E) 16

二、多重選擇題（每題 5 分，共 40 分）

每題至少有一個選項是正確的。答錯一個選項得 4 分；答錯兩個選項得 3 分；答錯三個選項得 2 分；答錯四個選項得 1 分，答錯五個選項或未作答者均不予給分。

1. 設兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 滿足 $\deg(f(x)) = 2$ 且 $\deg(g(x)) = 2$ ，則 $\deg(f(x) + g(x))$ 的值可能為下列那些選項？
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
2. 設 $a < b < c$ ，已知實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形為一開口向下的拋物線，且與 x 軸交於 $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$ 兩點。則 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形可能為下列那些選項？
(A) 水平直線 (B) 和 x 軸僅交於一點的直線
(C) 和 x 軸無交點的拋物線 (D) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
(E) 和 x 軸交於兩點的拋物線

3. 已知拋物線 $\Gamma: y = (x + 1)^2 + 1$ 與直線 $y = 2x + 2$ 恰交於一點 $(0, 2)$ 。設 L 為斜率等於 2 的直線，若 L 與 Γ 沒有交點，則 L 上任一點 P 的坐標 (x, y) 滿足下列哪些關係？
- (A) $y > (x + 1)^2 + 1$ (B) $y < (x + 1)^2 + 1$
 (C) $y = (x + 1)^2 + 1$ (D) $y > 2x + 2$
 (E) $y < 2x + 2$
4. 若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形是一開口向下的拋物線 (a, b, c 皆為實數)，其圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 兩點。則下列哪些值為正數？
- (A) a (B) b (C) c (D) $b^2 - 4ac$ (E) $a + b + c$
5. 若點 $P(a, b)$ 在二次函數 $f(x) = x^2$ 的圖形上，則下列哪些點必在二次函數 $g(x) = x^2 - 2x + 3$ 的圖形上？
- (A) (a, b) (B) $(-a, b)$ (C) $(a + 1, b + 2)$
 (D) $(-a + 1, b + 2)$ (E) $(a - 1, b - 2)$
6. 設多項式 $f(x)$ 除以 $ax - b$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 r ，其中 a, b 皆為異於 0 的實數。請選出正確的選項。
- (A) $f(x)$ 除以 $x - \frac{b}{a}$ 的商式為 $q(x)$
 (B) $f(x)$ 除以 $x - \frac{b}{a}$ 的餘式為 r
 (C) $xf(x)$ 除以 $ax - b$ 的餘式為 rx
 (D) $f(\frac{x}{a})$ 除以 $x - b$ 的商式為 $q(\frac{x}{a})$
 (E) $f(bx)$ 除以 $ax - 1$ 的商式為 $q(bx)$
7. 若三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形 (a, b, c, d 皆為實數) 與 x 軸交於 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 三點；且在 $x > 3$ 時， $f(x)$ 為嚴格遞增。請選出正確的選項。
- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $f(x) < 0$ 的解為 $x < 1$ 或 $2 < x < 3$
 (D) $d > 0$ (E) 若 $1 < m < n < 2$ ，則 $f(\frac{m+n}{2}) > \frac{f(m)+f(n)}{2}$

8. 已知函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ ，若 $f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ (其中 a, p, h, k 皆為實數)，請選出正確的選項。
- (A) $a = 1$ (B) $p = 2$
(C) 函數 $f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 4)$
(D) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸至少交一點
(E) $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的一次近似函數 $g(x) = 2x + 2$

三、填充題(每題 5 分，共 35 分)

1. 若不等式 $(x+1)(x+3)(x^2+mx+m) < 0$ 的解為 $-3 < x < -1$ ，則實數 m 的範圍為_____。
2. 不等式 $(6x^2 + 13x - 5)(x^2 + 2x - 1) < 0$ 的解為_____。
3. 已知不等式 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 的解為 $\frac{-1}{2} < x < \frac{2}{3}$ ，則實數數對 (a, b) 為_____。
4. 設 $f(x)$ 為一多項式，若多項式 $(x-1)f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $-3x$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為_____。
5. 若函數 $f(x) = mx^2 + 2mx + 1$ 的圖形與 x 軸沒有交點，則實數 m 的範圍為_____。
6. 坐標平面上，若二次函數 $f(x) = x^2 - x + k + 1$ 的圖形恆在直線 $y = x$ 的上方(兩圖形不相交)，則實數 k 的範圍為_____。
7. 已知三次多項式函數 $f(x)$ 的圖形經過 $(-1, -2)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 14)$ 四點，則 $f(x)$ 依降冪排列為_____。