

# 110 學年度第二學期第三次定期考高二數學 A 試題

命題範圍：第四章 矩陣

## 一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

第 1 至 2 題為單一選擇題，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.  $A=[a_{ij}]_{2 \times 2}$ ， $a_{ij}=i+j$ ； $B=[b_{ij}]_{2 \times 2}$ ， $b_{ij}=i-j$ ； $C=[c_{ij}]_{2 \times 2}$ ， $c_{ij}=i \times j$ ，則  $A+B-C=?$

(A)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. 設  $a \in \{-1, 1, 2, 3\}$  且  $b \in \{0, -1, 1, 2\}$ ，試問矩陣  $\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b^2 & b \end{bmatrix}$  無反方陣之機率為 (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{3}{16}$

## 二、多重選擇題（每題 8 分，共 24 分）

第 3 至 5 題，每題至少有一個選項是正確的。每題全部答對得 8 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上選項不給分。

3. 有關矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  與矩陣  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？
- (A)  $AB=BA$  (B)  $A^2B=BA^2$  (C)  $A^{11}B^3=B^6A^5$   
(D)  $AB^{12}=A^7$  (E)  $(ABA)^{15}=AB^{15}A$ 。

4. 讓我們「穿越」回到台灣的過去：早年(1990 年之前)，台灣只有台視、中視、華視等三家電視台(也就是「老三台」)可以收看，且台灣人民每天晚上的主要娛樂，就是收看每個電視台所精心製作，互相競爭「收視率」的「八點檔連續劇」。

根據晚上八點檔連續劇的收視調查顯示：去年收看台視連續劇的觀眾有 80% 的觀眾今年不換台，而轉向收看中視與華視連續劇的觀眾分別各占 10%；去年收看中視連續劇的觀眾有 70% 的觀眾今年繼續看中視的連續

劇，而改為收看台視與華視連續劇的觀眾分別各占 20%與 10%；而去年收看華視連續劇的觀眾則有 60%的觀眾今年仍繼續看華視，而轉收看台視與中視連續劇的觀眾則分別各占 10%與 30%。如果長期而言，三家電視台的「收視率」會趨於「穩定狀態」，試問下列哪些選項是正確的？

(A) 台視、中視、華視等三家電視台所對應的「收視率轉移矩陣」為

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

- (B) 台視公司的收視率佔有率會一直大於 50%  
 (C) 在收視率發生「穩定狀態」的情況下：台視公司的收視率>中視公司的收視率。  
 (D) 在收視率發生「穩定狀態」的情況下，台視公司的收視率會較中視公司的收視率高 15%  
 (E) 在收視率發生「穩定狀態」的情況下，中視公司的收視率會較華視公司的收視率高 15%

5. 設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  均為  $3 \times 3$  矩陣，下列敘述何者是正確的？

(A) 若  $AB = O$  則  $A = O$  或  $B = O$

(B) 若  $AB = AC$  則  $B = C$

(C) 若  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  則  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) 若  $A$  有乘法反方陣且  $A^2 = B^2$ ，則  $B^2$  有乘法反方陣

(E) 若  $A^2 = I$  則  $A = I$  或  $-I$ 。

### 三、填充題（每格 7 分，共 56 分）

第 1 至 8 題，每題答對得 7 分，答錯不倒扣，每格全對才給分。

1. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，求  $P(4, -1)$  經過  $A$  變換後的像點  $Q$  座標為 (1)。

2. 設  $A = \begin{bmatrix} x+2 & 1 \\ 1 & y-3 \end{bmatrix}$ ，且  $A = A^{-1}$ ，求  $(x, y) = \underline{(2)}$ 。

3.  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$ ， $XA = \begin{bmatrix} 2p-3a & 2q-3b & 2r-3c \\ x+4p & y+4q & z+4r \\ 3a+5p & 3b+5q & 3c+5r \end{bmatrix}$ ，則  $X = \underline{(3)}$ 。

4. 平面上有三直線  $(a-1)x+2y=3$  ,  $(a+1)x+2y=1$  ,  $(3-a)x+4y=7$  交於一點  $(b,c)$  , 則數對  $(a,b,c)$  為 (4) 。
5. 設  $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  ,  $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  , 若矩陣方程組  $\begin{cases} X+2Y=5A \\ 2X-Y=5B \end{cases}$  ,  
則  $X+Y=$  (5) 。
6. 在坐標平面上, 將  $A$  點  $(1,-2)$  沿  $x$  軸方向推移  $y$  坐標的 2 倍後, 並在  $x$  軸、 $y$  軸方向各伸張 2 倍, 則新坐標為 (6) 。
7. 若  $A^3=\begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  ,  $A^5=\begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$  則  $A=$  (7) 。
- 8 設矩陣  $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $B=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  , 若  $(B^{-1}AB)^{10}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  , 則  $c=$  (8) 。

#### 四、 計算證明題 ( 共 10 分 )

1. 設  $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$  ,  $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ,

(1) 求證  $A(A-I_2)=A-I_2$  。 (5 分)

(2) 求  $A^n$  。 (5 分)