

110 學年度第二學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章隨機變數

一、多重選擇題（每題 8 分，共 32 分）

每錯一選項扣 3 分，未作答及錯 3 選項或以上者該題 0 分

1. 設 $z = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$ ，已知 $f(x)$ 為三次實係數多項式且滿足 $f(z) = 0$ 。請選出正確的選項。

(1) $f(\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i) = 0$ (2) $f(\frac{1}{z}) = 0$ (3) 方程式 $f(x^2) = 0$ 至少有一個實根

(4) 方程式 $f(x^3) - x^6 = 0$ 至少有一個實根

(5) 給定任意相異正數 α, β, γ ，則一定存在實數 a, b, c, d 使得

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) + b(x - \alpha)(x - \beta) + c(x - \gamma) + d$$

2. 已知 $f(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ 有一實根 α 不大於 -2 。取 $x_1 = -2$ ，使用牛頓法求得 α 的近似值 x_2 ，利用 x_2 的值，再使用牛頓法可求得 α 的另一近似值 x_3 。請選出正確的選項。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有一實根 (2) $-3 \leq \alpha \leq -2$

(3) $-3 \leq x_2 \leq \alpha$ (4) $\alpha \leq x_2 \leq x_1$ (5) $x_2 \leq x_3 \leq \alpha$

3. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ， $t = \omega + \frac{1}{\omega}$ 。請選出正確的選項。

(1) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{2016} = 0$

(2) 複數平面上 $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$ 代表一正六邊形的頂點

(3) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

(4) $\omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = t^3 - 3t$

(5) 存在一個整係數三次多項式 $f(x)$ ，使得 $f(2\cos \frac{2\pi}{7}) = 0$

4. 重複操作一個成功機率是 $\frac{2}{3}$ 的伯努力試驗，且每次試驗結果都是獨立的。
請選出正確的選項。
- (1) 4 次試驗中恰出現 2 次成功的機率小於 $\frac{1}{3}$
- (2) 若重複操作此試驗 100 次，則成功次數的標準差為 $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ 次
- (3) 直到第 5 次才出現第一次成功的機率為 $\frac{10}{243}$
- (4) 已知該試驗前 5 次皆失敗，則直到第 9 次才出現第一次成功的機率為 $\frac{2}{81}$
- (5) 此試驗出現第一次成功所需的試驗次數之變異數為 $\frac{4}{3}$

二、填充題（每題 6 分，共 54 分）

1. 給定兩實數 a, b 且滿足 $\frac{2+i}{a+bi} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設多項式 $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x - 15$ ，已知 $f(x) = 0$ 的三根為 α, β, γ ，且 $-5 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 5$ ，及 $a \leq \alpha < a+1$ ， $b \leq \beta < b+1$ ， $c \leq \gamma < c+1$ ，其中 a, b, c 為整數，則實數序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 已知實係數方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 至少有一個實根，且其四根為 $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ 。若 $\alpha + \beta = 7 - 3i$ ， $\gamma\omega = 4 - 6i$ ，則 $a + b + c + d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 已知 z 為複數，且 $\frac{z-1}{z-3}$ 為純虛數，則 $|z-i|$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p (其中 $0 < p < 1$)，且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X = k)$ 。已知 $p_4 + p_5 = 18p_6$ ，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 局。
6. 袋中有編號 1 到 9 號的球各一顆，每球被取出的機會均等。小曄自袋中隨機一次取出兩球，令隨機變數 X 為取出兩球中的較小號碼，則 X 的期望值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 袋中有 3 顆紅球和 2 顆黑球，每球被取出的機會均等。小宥自袋中每次取一球，採取出放回方式，直到取到第一次黑球才停止。令隨機變數 X 為取球總次數，則 X^2 的期望值為_____。
8. 袋中有 3 顆紅球和 2 顆黑球，每球被取出的機會均等。小宥自袋中每次取一球，採取出不放回方式，直到將黑球取完才停止。令隨機變數 Y 為取出球的數量，則 Y 的變異數為_____。
9. 建國公司舉辦「現金大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 4000 元；若出現一正一反可得獎金 8000 元；若出現兩個正面可得獎金 8000 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會），則每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為_____元。

三、計算題（共 14 分）

說明：請利用下表數據作答，未寫計算過程不計分。

假設隨機變數 X 為二項分布，即 $X \sim B(n, p)$ ，機率質量函數為

$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 。以下是二項分布的部分機率分布：

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	p 0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

說明：已知 $X \sim B(10, 0.4)$ 時， $P(X = 3) = C_3^{10} (0.4)^3 (0.6)^7 \approx 0.2150$ 。

1. 已知 $X \sim B(10, 0.4)$ 時，請利用上表數據，求 $P(X \leq 3)$ 的近似值。(3 分)
2. 某公司生產 A 產品，想增聘一位作業員增加 A 產品的產能。令 p 表示作業員製作 A 產品的不良率。假設每個人的 p 只有可能是 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ 。公司想要的作業員須符合 p 為 $\frac{1}{4}$ ，藉由面試時製作 10 個 A 產品，並且採用以下的判斷準則來決定是否聘用。若不良品個數不多於 2 次，則決定聘用；反之，若不良品個數多於 2 次，則不聘用。請利用上表數據回答下列問題。
 - (1) 若應徵者製作 A 產品的不良率 $p = \frac{1}{4}$ 時，求該公司可以作出正確判斷的機率近似值？(3 分)
 - (2) 若應徵者製作 A 產品的不良率 $p = \frac{1}{2}$ 時，求該公司可以作出正確判斷的機率近似值？(3 分)
3. 鐵路局宣稱火車誤點的機率 p 在 0.3 以下（含 0.3）。今檢定火車誤點的機率，並列出前三個步驟如下：
 - ① 假設「火車誤點的機率 $p \leq 0.3$ 」；
 - ② 確立檢定統計量為「隨機觀察 10 班火車誤點的班數」；
 - ③ 設定顯著水準為 0.05。請利用上表數據回答下列問題。
 - (1) 設隨機變數 x 表示火車誤點的班數，求拒絕域。(3 分)
 - (2) 若試驗的結果為有 5 班火車誤點，則是否拒絕「火車誤點的機率 $p \leq 0.3$ 」的假設？(2 分)